Équations – Inéquations

Objectifs (*BO* – Hors série N°10, 15 octobre 1998)

- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est positif, dans l'ordre inverse si a est négatif.
- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée.
- Résoudre une équation mise sous la forme $A \times B = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.
- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation du premier degré.

1 Rappel : Équations du premier degré

Théorème

L'équation $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ a une seule solution : $-\dfrac{b}{a}$.

Exemple : L' équation $4x + 5 = 0$ a une solution : $\boxed{-\frac{5}{4}}$.

Vérification : $4 \times (-\frac{5}{4}) + 5 = -5 + 5 = 0$.

Démonstration : Soit l'équation $ax+b = 0$. Par soustraction de chaque côté de l'égalité, on obtient : $ax+b-b = 0-b$, c'est à dire : $ax = -b$. Puis, par division de chaque côté de l'égalité, on obtient : $ax \div a = -b \div a$, d'où $x = -\frac{b}{a}$. ■

2 Équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$

Règle

Si un produit est nul, alors l'un des termes au moins est nul. C'est à dire : si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Théorème

L'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ a au maximum deux solutions : $-\frac{b}{a}$ et $-\frac{d}{c}$.

Remarque : Si $-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$ alors il n'y a qu'une seule solution $-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$

Exemple : $(x + 3)(3x - 6) = 0$ donc

$$\begin{array}{ccc} x + 3 = 0 & \text{ou} & 3x - 6 = 0 \\ x = -3 & \text{ou} & 3x = 6 \\ x = -3 & \text{ou} & x = 2 \end{array}$$

L'équation a deux solutions : $\boxed{-3}$ et $\boxed{2}$.

Exemple : $(2x - 3)(4x - 6) = 0$ donc

$$\begin{array}{ccc} 2x - 3 = 0 & \text{ou} & 4x - 6 = 0 \\ 2x = 3 & \text{ou} & 4x = 6 \\ x = \frac{2}{3} & \text{ou} & x = \frac{6}{4} = \frac{2}{3} \end{array}$$

L'équation a une solution : $\boxed{\frac{2}{3}}$.

Exemple : $x^2 - (3x-4)^2 = 0$. En factorisant, on obtient $(x+(3x-4))(x-(3x-4)) = 0$ soit $(4x-4)(-2x+4) = 0$.
L'équation a deux solutions : $\frac{4}{4} = \boxed{1}$ et $\frac{-4}{-2} = \boxed{2}$.

3 Inéquation du premier degré

a. Effet de la multiplication sur l'ordre

Propriété

Soient b et c deux nombres tels que $b < c$.
Si a est un nombre strictement positif ($a > 0$), alors $ab < ac$.
Si a est un nombre strictement négatif ($a < 0$), alors $ab > ac$.

Exemple : Si $x > 4$ alors $7x > 28$, mais $-7x < -28$.

b. Effet de l'addition et de la soustraction sur l'ordre

Propriété

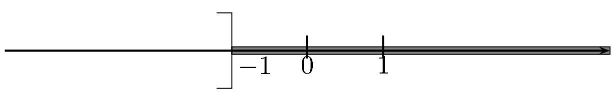
Soient b et c deux nombres tels que $b < c$.
Alors quel que soit le nombre a, on a : $b + a < c + a$.
Quel que soit le nombre a, on a : $b - a < c - a$.

c. Résolution

Définition

Résoudre l'inéquation $ax + b > c$, c'est trouver toutes les valeurs de x vérifiant cette inégalité.

Exemple : Résoudre l'inéquation $6x + 1 > -5$ et représenter ses solutions sur une droite graduée.
$6x + 1 - \mathbf{1} > -5 - \mathbf{1}$
$6x > -6$
$\frac{6x}{\mathbf{6}} > \frac{-6}{\mathbf{6}}$
$x > -1$
Interprétation graphique. La partie correspondant aux solution a été grisée. (le crochet est tourné du côté opposé aux solutions pour indiquer que la valeur -1 n'est pas prise) :



Exemple : Résoudre l'inéquation $3 - 4x \geq 11$ et représenter ses solutions sur une droite graduée.
$-4x \geq 11 - 3$
$-4x \geq 8$
$-4x \times (-\frac{1}{4}) \leq 8 \times (-\frac{1}{4})$ (changement du sens de l'inégalité)
$x \leq -2$
Interprétation graphique. La partie correspondant aux solution a été grisée. (le crochet est tourné du côté des solutions pour indiquer que la valeur -2 est prise) :